מבוא לסטטיסטיקה והסתברות

פרק 40 - אמידה נקודתית

תוכן העניינים

אומד חסר הטייה:

רקע:

$\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל-θ, אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל-θ : $E(\hat{\theta})=\theta$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

המשתנה X הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

X	1	2	3
הסתברות	2θ	$1-6\theta$	4θ

מעוניינים לאמוד את θ על סמך שתי תצפיות מההתפלגות: X_1 ו-X_2.

א. הראו שהאומד: $T_1=\frac{2X_1+X_2}{2}$, הוא אומד מוטה ל-θ.

הטיה של אומד היא: $E(\hat{\theta})-\theta$. כמובן שלאומד חסר הטיה אין הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד T_1?

ג. תקנו את T_1, כך שיהיה אומד חסר הטיה.

אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא: $T_3=1.5X_1-X_2-1$.

האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג'?

אם $\hat{\theta}$ אומד חסר הטיה ל-θ, אז $g(\hat{\theta})$ יהיה אומד חסר הטיה עבור $g(\theta)$, רק אם g תהיה לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל: $P(X=3)$.

אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה σ^2: $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}$.

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של X.

תזכורות חשובות:

אם: $Y=aX+b$, אזי: $E(Y)=aE(X)+b$, $V(Y)=a^2\cdot V(X)$, $\sigma_Y=|a|\sigma_x$.

אם: $X_1,X_2,.......,X_n$ משתנים מקריים, אזי:

$E(T)=E(X_1+X_2+......+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+......+E(X_n)$.

אם: $X_1,X_2,.......,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$V(T)=V(X_1+X_2+......+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+......+V(X_n)$.

שאלות:

1) הציון במבחן מסוים של תלמידי כתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת μ וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת μ, נלקח מדגם של 5 ציונים: $X_1,\ldots,X_5$.

שלושה חוקרים הציעו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

חוקר א' הציע: $T_1=\dfrac{X_1+\ldots+X_5}{5}$.

חוקר ב' הציע: $T_2=\dfrac{2X_1-X_3+X_4}{2}$.

חוקר ג' הציע: $T_3=\dfrac{2X_1+X_3}{2}$.

א. איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?

ב. הציעו תיקון לאומד המוטה כך שיהיה חסר הטיה.

ג. במדגם התקבלו הציונים הבאים: 65, 78, 58, 82, 100.
חשבו את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי ההטיה.

ד. איזה מבין שני האומדים חסרי ההטיה עדיף? נמקו.

2) כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של $2n$ נשים.
נסמן את שונות הגובה ב- σ^2. הוצעו שני אומדים לממוצע המשקל על סמך מדגם זה: $T_1=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $T_2=\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$.

א. בִּדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.

ב. איזה אומד עדיף? נמקו.

3) $X\sim B(n,p)$. כלומר, X הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר P (סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל n.

א. פתחו אומד חסר הטיה ל- P.

ב. מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד?

ג. מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$?

ד. מצאו אומד חסר הטיה ל- $E(X^2)$.

4) בתיק מניות שתי מניות. מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר לא ידוע: θ, $0 \le \theta \le 2$.
פונקציית ההסתברות של X - מספר המניות שיעלו ביום מסוים:
$P(X=2)=\frac{\theta}{6}$, $P(X=1)=\frac{\theta}{3}$, $P(X=0)=1-\frac{\theta}{2}$.

א. מְצאו אומד בלתי מוטה ל-θ, שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.
ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל-θ, שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום, במשך שלושה ימים - X_1, X_2, X_3 (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל והם בלתי תלויים).

5) בקרב המטפלות בת"א, מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מקרי בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ באופן הבא:
הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחד בלבד הוא 3θ,
הסיכוי שמטפלת תטפל ב-2 תינוקות הוא $1-4\theta$,
הסיכוי שמטפלת תטפל ב-3 תינוקות הוא θ.
במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת"א, נמצא כי שתים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד, אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.

א. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת.
ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך 4 תצפיות.
ג. מהו האומדן לפרמטר θ על סמך תוצאות המדגם.
ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת"א תטפל בתינוק בודד אחד.
ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מת"א. חשבו אומדנים.

6) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ, אז $5T$ אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר 5θ.
ב. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ, אז T^2 אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר θ^2.

7) במפעל שתי מכונות המייצרות מוצרים. במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא p, ובמכונה השנייה ההסתברות שמכשיר תקין היא $2p$.
דוגמים 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה.
נסמן ב- X את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה,
וב- Y את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה השנייה.
איזה מבין האומדים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל- p ?

א. $\frac{X}{20}$.

ב. $\frac{Y}{20}$.

ג. $\frac{X+Y}{60}$.

ד. $\frac{2X+Y}{80}$.

8) יהיו T_1 ו- T_2 אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר θ.

א. מצאו אומד חסר הטיה ל- θ^2, המתבסס על T_1 ו- T_2.

ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta(1-\theta)$, המתבסס על T_1 ו- T_2.

9) נתון ש- X הינו משתנה מקרי עם תוחלת μ ושונות σ^2.
נדגמו n תצפיות בלתי תלויים מאותה אוכלוסיה.

א. הראו ש- $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ אומד חסר הטייה ל- μ, כאשר: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות: $X_1 \cdot X_2$.
הראו שהוא אומד חסרי הטיה ל- μ^2.

10) $X_i \sim N(\mu,1)$, כאשר: $i=1,2...,n$.
נתון שהתצפיות הינן בלתי תלויות זו בזו.
מצאו אומד חסר הטיה ל- μ^2.

11) נתונות n תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות בעלת הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1+\beta x}{2} & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}.$$

א. הראו כי האומד $3\overline{X}$ הנו אומד בלתי מוטה ל-β.

ב. מצאו את השונות של האומד מהסעיף הקודם.

12) $X_1,X_2,...,X_n$ הינם משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעלי פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}X\cdot A & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}.$$

א. בטאו את ערכו של A באמצעות θ, כדי שפונקציית הצפיפות תהיה לגיטימית.

ב. מצאו אומד חסר הטיה ל-θ, על סמך n התצפיות.

תשובות סופיות:

1) א. T_1 ו- T_2. ב. $\frac{2}{3}T_3$. ג. $T_1 = 76.6$, $T_2 = 110$ ד. T_1.

2) א. ראו בווידאו. ב. T_2.

3) א. $\frac{x}{n}$. ב. $1-\frac{x}{n}$ ג. X. ד. θ.

4) א. $\frac{3x}{2}$. ב. $\frac{3\overline{x}}{2}$.

5) א. $1-\frac{x}{2}$. ב. $1-\frac{1}{2}\overline{x}$. ג. 0.125. ד. $3\left(1-\frac{1}{2}\overline{x}\right)$.
ה. לשונות 0.917.

6) א. נכון. ב. לא נכון.

7) ב'.

8) א. $T_1 \cdot T_2$. ב. $T_1 - T_1 \cdot T_2$.

9) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

10) $\overline{X}^2 - \frac{1}{n}$.

11) א. שאלת הוכחה. ב. $V\left(3\overline{X}\right) = \frac{3-\beta^2}{n}$.

12) א. $A = \frac{2}{\theta^2}$. ב. $\theta = \frac{3}{2}\overline{X}$.

קריטריון MSE – תוחלת ריבוע הטעות:

רקע:

הקריטריון הנפוץ ביותר כדי לבדוק את טיב האומד הוא קריטריון MSE:
Mean Squared Error – תוחלת ריבוע טעות האמידה.

$$MSE\left(\hat{\theta}\right)=E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2=V\left(\hat{\theta}\right)+\left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)^2 .$$

כאשר: $V\left(\hat{\theta}\right)$ - הינה שונות האומד.

$E\left(\hat{\theta}\right)-\theta$ - הינה ההטיה של האומד.

אם T_1 ו- T_2 הינם אומדים לפרמטר θ, האומד העדיף יהיה זה עם MSE קטן יותר.
כלומר, אם: $MSE\left(T_1\right)>MSE\left(T_2\right)$, אז T_2 עדיף על T_1.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתון משתנה X המתפלג אחיד רציף באופן הבא: $X\sim U\left(3,\theta\right)$.

מוצעים שני אומדים לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת: $T_1=2X-3$ ו- $T_2=\frac{3X-3}{2}$.

איזה אומד עדיף לאמידת הפרמטר θ?

שאלות:

1) מעוניינים לאמוד את התוחלת של התפלגות מסוימת.
מוצעים שני אומדים אפשריים ממוצע של שתי תצפיות וממוצע של שלוש תצפיות.
לפי קריטריון תוחלת ריבוע הטעות (MSE), איזה אומד עדיף? הסבירו.

2) בעיר מסוימת בשוויץ בכל θ דקות רכבת מגיעה לתחנה מסוימת.
דוד מגיע לתחנה בזמן אקראי ומודד את זמן ההמתנה לרכבת - X.

א. הצע אומד חסר הטיה ל-θ, על סמך X.

ב. סטטיסטיקאי הציע לאמוד את θ על סמך האומד: $1.5X$.
האם האומד הנ"ל מוטה?

ג. איזה אומד מבין האומדים בסעיפים א' ו-ב' עדיף?

3) חוקר מעוניין לאמוד את הסיכוי לחלות במחלת השפעת בחורף (להלן: הפרמטר P). הוא דוגם חמישה אנשים בריאים, ומתבונן בסטטיסטי X - מספר האנשים שחלו בשפעת בחורף.
הוא מתלבט בין שני אומדים: $T_1 = \frac{X}{5}$ ו- $T_2 = \frac{X+1}{7}$.

א. מי מבין האומדים הללו הוא חסר הטיה?

ב. מי מבין האומדים עדיף אם $P = 0.5$?

ג. מי מבין האומדים עדיף אם $P = 0.1$?

4) מספר השריפות המתרחשות בארץ בחודש אוקטובר מתפלג פואסונית עם תוחלת λ. נלקח מדגם של 10 חודשי אוקטובר. להלן שני אומדים אפשריים:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10} \quad \text{ו-} \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{2\cdot\sum_{i=1}^{5} X_i + 2\cdot\sum_{i=6}^{10} X_i}{10}.$$

כאשר: X_i = מספר השריפות בחודש אוקטובר ה-i.
איזה מהאומדים עדיף, לצורך אמידת הפרמטר λ?

5) הוכח ש: $E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2 = V\left(\hat{\theta}\right) + \left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)^2$.

תשובות סופיות:

1) שלוש תצפיות.

2) א. $2x$.   ב. אומד מוטה.   ג. סעיף ב.

3) א. T_1.   ב. T_2.   ג. T_1.

4) $\hat{\lambda}_1$.

5) שאלת הוכחה.

אומד חסר הטיה בעל שונות מינימלית:

אומד חסר הטיה יעיל ביותר – MVUE (Minimum-variance unbiased estimator).

רקע:

T יהיה MVUE, אם מתקיים ש- T אומד חסר הטיה ל- θ, ובנוסף מתקיים ש:
$V(T)\le V(\hat{\theta})$, לכל $\hat{\theta}$ חסר הטיה אחר.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

לרשת חנויות ישנם שני סניפים. מספר הלקוחות הנכנסים לכל סניף ביום מתפלג פואסונית עם קצב של λ בסניף A וקצב של 2λ בסניף B.
נדגמו n ימים מכל סניף, ונבדק בכל יום:
X_i - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף A ביום i.
Y_j - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף B ביום j.
על מנת לאמוד את λ, מוצע האומד: $\alpha\bar{X}+\beta\bar{Y}$.

א. מה התנאי, שצריך להתקיים על α ו- β, כדי שהאומד יהיה חסר הטיה?

ב. מה צריכים להיות α ו- β כדי שהאומד יהיה גם בעל שונות מינימלית?

שאלות:

1) T_1 ו- T_2 הינם אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר θ.
כמו כן, נגדיר: $T = aT_1 + bT_2$.
א. מה צריך להיות התנאי על a ו- b, כדי ש- T יהיה אומד חסר הטיה?
ב. σ_1^2 ו- σ_2^2 הם השונויות של T_1 ו- T_2, בהתאמה.
מצאו a ו- b, כך ש- T יהיה אומד חסר הטיה ל- θ, ובעל שונות מינימלית.

2) במפעל 3 מכונות המייצרות את אותו חלק.
תוחלת הקוטר של החלקים המיוצרים בכל מכונה זהה.
השונויות של כל מכונה שונות, ומקיימות: $\sigma_2^2 = 2\sigma_1^2$, $\sigma_3^2 = 3\sigma_1^2$.
הוחלט לדגום n חלקים מכל מכונה, ולחשב את ממוצע הקוטר המתקבל.
$\bar{X}_i$ - יהיה הממוצע המתקבל במכונה i.
יהי: $W = \sum_{i=1}^{3} a_i \bar{X}_i$ האומד לתוחלת קוטר החלקים המיוצרים על ידי מכונה כלשהי.
א. מה התנאי שצריך להתקיים על המשקלים a_i, כדי שהאומד המוצע יהיה בלתי-מוטה?
ב. נניח ש- $a_1 = a_2$.
מה במקרה זה המשקלים המביאים את האומד להיות MVUE?

תשובות סופיות:

1) א. $a+b=1$. ב. $a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$, $b = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

2) א. $\sum_{i=1}^{3} a_i = 1$. ב. $a_1 = a_2 = 0.4$, $a_3 = 0.2$.

שאלות מסכמות:

שאלות:

1) במפעל מייצרים מוצרים בשלוש מכונות שונות ובלתי תלויות.
במכונה הראשונה הסיכוי שמוצר יהיה תקין הוא P , במכונה השנייה
ההסתברות שמוצר יהיה תקין הוא P^2 ובמכונה השלישית הסיכוי הוא $2P$.
דוגמים 20 מוצרים מכל מכונה.
נסמן ב- X את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה הראשונה,
ב- Y את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השנייה
וב- Z את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השלישית.
א. מהם הערכים האפשריים של הפרמטר P ?
ב. מצאו אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר P , על סמך X ו- Z .
ג. אם התקבל ש- $Y=3$, $X=6$, מהו אומדן נראות מקסימלית ל- P ?

2) מספר תאונות הדרכים בקטע כביש א' מתפלג פואסונית עם קצב של λ
תאונות בחודש, ומספר תאונות הדרכים בקטע כביש ב' מתפלג פואסונית
עם קצב של 2λ תאונות בחודש.
הוחלט לספור את כמות התאונות בחודש בכל אחד מקטעי הכביש.
נסמן ב- X את מספר התאונות בחודש בקטע א' וב- Y בקטע ב'.
א. מצאו אומד נראות מקסימלית לפרמטר λ, על סמך X ו- Y .
ב. מצאו אומד נראות מקסימלית, לסיכוי שבקטע כביש א תהיה לפחות
תאונה אחת בחודש.
ג. האם האומד שמצאת בסעיף א הוא חסר הטיה ל- λ ?

3) זמן הייצור של מוצר מסוים בתהליך ייצור מתפלג נורמאלית, עם תוחלת
ושונות שאינן ידועות.
א. הציעו אומדים חסרי הטיה לתוחלת והשונות של זמן הייצור של המוצר.
ב. הציעו אומדי נראות מקסימלית לתוחלת ולשונות של זמן הייצור של המוצר.
ג. הציעו אומד נראות מקסימלית לריבוע התוחלת של זמן הייצור.
ד. האם האומד מהסעיף הקודם הוא גם חסר הטיה?

4) בקזינו משחק, ובו 4 תאים ממוספרים מ-1 עד 4.
מפעיל המשחק שם כסף באחד מארבעת התאים והאדם המשתתף צריך לנחש באיזה תא הכסף מוחבא. מפעיל הקזינו מודיע שהסיכוי להחביא את הכסף בכל אחד משלושת התאים הראשונים שווה, אך לא בהכרח שווה לסיכוי להחביא אותו בתא הרביעי.
יש לאמוד את הסיכוי להחביא את הכסף בתא הראשון : P.
א. מצא את תחום ההגדרה של הפרמטר P.

יעל שיחקה את המשחק 3 פעמים וקיבלה שפעם אחת הכסף הוחבא בתא מספר 1 ובפעמים האחרות בתא מספר 2.
ב. מצאו אומדן ל- P על סמך התוצאות הללו בשיטת הנראות המקסימלית.
ג. מצאו אומד חסר הטיה ל- P. מהו האומדן לפי התוצאות של יעל?
ד. מצאו אומדן חסר הטיה ונראות מקסימלית לסיכוי שהכסף יוחבא בתא מספר 4 על סמך התוצאות של יעל.

5) יהי : $X_1, X_{2,}...X_n$ מדגם מקרי מתוך ההתפלגות הבאה :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{\lambda}\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^{\theta-1} & 0<x<\lambda,\ \theta>0\\ 0 & else\end{cases}$$

א. מצא אח"ה ל- λ (כאשר θ קבוע ידוע).
ב. מצא אנ"מ ל- θ (כאשר λ קבוע ידוע).
ג. מצא אנ"מ ל- λ (כאשר θ קבוע ידוע).

6) X - משך זמן הפרסומות בערוץ 2 מתפלג אחיד רציף בתחום $(0,\theta)$.
Y - משך זמן הפרסומות בערוץ 10 מתפלג אחיד רציף בתחום $(0,2\theta)$.
א. מצא אומד חסר הטיה ל- θ, המשתמש במשך זמן אקראי של פרסומת בודדת בערוץ 2 ופרסומת בודדת בערוץ 10.
ב. מוצע האומד : $T_2 = X + 0.5Y$. האם האומד הנ"ל הוא חסר הטיה?
ג. איזה אומד יותר עדיף זה של סעיף א או זה של סעיף ב'?
ד. מצא אומד נראות מקסימלית ל- θ על סמך X ו- Y.

7) נדגמו 2 תצפיות, X_1, X_2, בלתי תלויות מהתפלגויות אחידות רציפות התלויות בפרמטר θ.
ידוע כי : $X_2 \sim U(0,a\theta)$, $X_1 \sim U(0,\theta)$ (כאשר a קבוע ידוע וחיובי).
א. מצא אנ"מ ל- θ, על סמך 2 התצפיות הנ"ל.
ב. חשב את תוחלת ושונות האנ"מ מסעיף א'. האם האנ"מ מוטה?
ג. מצא אח"ה ל- θ על סמך סכומן של 2 התצפיות הנ"ל. מהי שונותו?

תשובות סופיות:

1) א. $0 \le P \le 0.5$. ב. $\hat{p} = \frac{x+z}{60}$. ג. 0.345.

2) א. $\frac{x+y}{3}$. ב. $1-e^{-\frac{x+y}{3}}$. ג. כן.

3) א. מאחר ולא התבקשתם לפתח, הרי שהאומד זהה לנוסחה הכללית (ראו נספח).
ב. כנ"ל. ג. כנ"ל (ראו הפרק על אומד נראות מקסימלי). ד. לא.

4) א. $0 \le P \le \frac{1}{3}$. ב. $\frac{1}{3}$. ג. 0.389. ד. -0.167.

5) א. אחה"ה יהיה: $\hat{\lambda} = \frac{\theta+1}{\theta}\overline{x}$. ב. $\hat{\theta} = \frac{n}{n\ln\lambda - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$.
ג. $\hat{\lambda} = X_{\max}$.

6) א. $T_1 = (x+y)\frac{2}{3}$. ב. כן. ג. ב'. ד. $\hat{\theta} = \max\left\{x, \frac{1}{2}y\right\}$.

7) א. $\hat{\theta} = \max\left(X_1, \frac{X_2}{a}\right)$. ב. $E(\hat{\theta}) = \frac{2}{3}\theta$, $V(\hat{\theta}) = \frac{1}{18}\theta^2$.
ג. $\tilde{\theta} = \left(\frac{2}{1+a}\right)(X_1 + X_2)$.

נספח: אומדי נראות מקסימלית ואומדים חסרי הטיה בהתפלגויות השונות:

מודל בינומי

נתון מדגם של משתנה בינומי: $X \sim B(n,p)$.

א.נ.מ עבור p הוא: $\hat{p}=\frac{X}{n}$, והוא גם א.ח.ה.

מודל אחיד (בדיד)

נתון מדגם: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ של משתנים אחידים: $X_i \sim U(1,N)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור N הוא: $\hat{N}=\max\{X_1,\ldots,X_n\}$, ואינו א.ח.ה.

מודל פואסוני

נתון מדגם: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ של משתנים פואסוניים: $X_i \sim P(\lambda)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור λ הוא: $\hat{\lambda}=\bar{X}$ וגם א.ח.ה.

מודל גיאומטרי

נתון מדגם: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ של משתנים גיאומטריים: $X_i \sim G(p)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור p הוא $\hat{p}=\frac{1}{\bar{X}}$, אינו א.ח.ה. א.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{p}$, הוא $\bar{X}$ והינו א.ח.ה.

מודל נורמלי

נתון מדגם: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ של משתנים נורמליים: $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור μ, הוא: $\hat{\mu}=\bar{X}$.

כאשר μ ידוע, א.נ.מ עבור σ^2 הוא: $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ (אומד חסר-הטיה).

כאשר μ לא-ידוע, א.נ.מ עבור σ^2 הוא: $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ (אומד מוטה!!!).

אומד חסר-הטיה עבור σ^2:

כאשר μ ידוע: $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

כאשר μ לא-ידוע: $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$.

מודל מעריכי

נתון מדגם: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ של משתנים מעריכיים: $X_i \sim \exp(\theta)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור θ הוא: $\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}$ - מהווה אומד מוטה, וא.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{\theta}$ הוא $\overline{X}$ א.ח.ה.

מודל אחיד (רציף)

נתון מדגם: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ של משתנים אחידים: $X_i \sim U(0,\theta)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור θ הוא: $\hat{\theta} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ אינו א.ח.ה.

בכל התפלגות:

א.ח.ה עבור μ הוא: $\hat{\mu} = \overline{X}$.

אומד חסר-הטיה עבור σ^2:

כאשר μ ידוע: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i-=1}^{n}(X_i - \mu)^2$.

כאשר μ לא-ידוע: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i-=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$.